exercice 1 — Partie A

(E) $y' - 2y = xe^{x}$

1°) $y' - 2y = 0$ de la forme $ay' + by = 0$ avec $a = 1$, $b = -2$, $\frac{b}{a} =$
les solutions sont de la forme $y = k\,e^{-G(x)}$
avec G une primitive de $x \mapsto -2$, donc $G(x) = -2x$

$$y = ke^{2x}$$

2°) $g(x) = (-x-1)e^{x}$
$g'(x) = -1\,e^{x} + (-x-1)e^{x} = e^{x}(-1-x-1) = e^{x}(-x-2)$

$g'(x) - 2g(x) = e^{x}(-x-2) - 2(-x-1)e^{x} = e^{x}(-x-2+2x+2) = xe^{x}$

donc g est bien une solution de (E).

3°) les solutions de (E) sont de la forme $f(x) = ke^{2x} + g(x)$

$$f(x) = ke^{2x} + e^{x}(-x-1)$$

4°) on veut $f(0) = 0$ donc $ke^{0} + e^{0}(-1) = 0 \to k \cdot 1 = 0 \to k$

$$f(x) = e^{2x} - (x+1)e^{x}$$

Partie B.

$f(x) = e^{2x} - (x+1)e^{x}$

1°) a) $f'(x) = (2x)'e^{2x} - [(x+1)'e^{x} + (x+1)(e^{x})']$
$= 2e^{2x} - [e^{x} + (x+1)e^{x}] = 2e^{2x} - e^{x}(x+2)$

$f'(x) = e^{x}(2e^{x}) - e^{x}(x+2)$ $\qquad f'(x) = e^{x}(2e^{x} - x - 2$

b) $f'(0) = e^{0}(2\times e^{0} - 0 - 2) = 1(0) = 0.$; $f(0) = e^{0} - 1e^{0} = 0$

la tangente à la courbe au point $(0,0)$ a pour coefficient direc
0, c'est l'axe des abscisses

2°) a) $e^{t} = 1 + t + \frac{t^2}{2} + t^2\varepsilon_1(t)$ avec $\lim_{t \to 0} \varepsilon_1(t) = 0$

on remplace t par $2x$

$e^{2x} = 1 + 2x + \frac{(2x)^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$ $\qquad e^{2x} = 1 + 2x + 2x^2 + x^2\varepsilon(x)$

$f(x) = e^{2x} - (x+1)e^{x}$
$= 1 + 2x + 2x^2 + x^2\varepsilon_1(x) - (x+1)\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon_2(x)\right)$
$= 1 + 2x + 2x^2 - \left(x + x^2 + 1 + x + \frac{x^2}{2}\right) + x^2\varepsilon(x)$

$f(x) = 1 + 2x + 2x^2 - x - x^2 - 1 - x - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x) = \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$ $\lim_{x \to 0} \varepsilon$

Partie C

1°) $I = \int_{-0,3}^{0,3} \frac{x^2}{2} dx = \left[\frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3}\right]\right]_{-0,3}^{0,3} = \left[\frac{x^3}{6}\right]_{-0,3}^{0,3} = \frac{0,3^3 - (-0,3)^3}{6} = 0,009$

2°) $J = \int_{-0,3}^{0,3} e^{2x} dx = \left[\frac{e^{2x}}{2}\right]_{-0,3}^{0,3} = \frac{e^{0,6}}{2} - \frac{e^{-0,6}}{2} = 0,5\,(e^{0,6} - e^{-0,6})$

3°) $K = \int_{-0,3}^{0,3} (x+1)e^x\,dx$

$u = x+1 \rightarrow u' = 1$
$v = e^x \leftarrow v' = e^x$

par intégration par parties

$K = [uv]_{-0,3}^{0,3} - \int_{-3}^{3} u'v\,dx = \left[(x+1)e^x\right]_{-0,3}^{0,3} - \int_{-0,3}^{0,3} e^x dx$

$K = 1,3\,e^{0,3} - 0,7\,e^{-0,3} - \left[e^x\right]_{-0,3}^{0,3} = 1,3\,e^{0,3} - 0,7\,e^{-0,3} - \left[e^{0,3} - e^{-0,3}\right]$

$K = 0,3\,e^{0,3} + 0,3\,e^{-0,3}$ $\quad K = 0,3\,(e^{0,3} + e^{-0,3})$

4°) $L = \int_{-0,3}^{0,3} f(x)\,dx$

a) $L = \int_{-0,3}^{0,3} \left[e^{2x} - (x+1)e^x\right] dx = \int_{-0,3}^{0,3} e^{2x} dx - \int_{-0,3}^{0,3} (x+1)e^x dx$

$L = J - K = 0,5\,(e^{0,6} - e^{-0,6}) - 0,3\,(e^{0,3} + e^{-0,3})$

b) $L \simeq 0,00945$

c) $I - L \simeq 0,009 - 0,00945 \simeq -0,00045 = -4,5 \times 10^{-4}$.

$|I - L| \simeq 4,5 \times 10^{-4}$.

exercice 2.

Partie A

1°). $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(10\,;0,2)$ donc $T = \frac{X - 10}{0,2} \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,1)$

$p(9,5 \leq X \leq 10,5) = p\left(\frac{9,5-10}{0,2} \leq T \leq \frac{10,5-10}{0,2}\right) = p\left(-\frac{50}{2} \leq T \leq \frac{50}{2}\right)$

$= 2\Pi\left(\frac{50}{2}\right) - 1 \simeq 2\Pi(2,38) - 1 \simeq 2 \times 0,9913 - 1$

$P(9,5 \leq X \leq 10,5) \simeq 0,983$

2°) $p(\text{pièce conforme}) = P(9,5 \leq X \leq 10,5$ et $10,5 \leq Y \leq 11,5)$

X et Y sont indépendantes, donc $P(\text{pièce confor}) = P(9,5 \leq X \leq 10,5) \times P(10,5 \leq Y$

$\simeq 0,983 \times 0,985$

$\simeq 0,968$.

Partie B.

1°) $P(E) = 1 - 0,968 \simeq 0,032 \simeq 0,03$.

On considère l'expérience élémentaire : on prend une pièce, soit elle est défectueuse, avec une probabilité 0,03, soit elle est correcte avec une proba 0,97.

on répète 50 fois cette expérience de façon indépendante
la variable aléatoire X suit donc la loi binomiale $\mathcal{B}(50\,;\,0{,}03)$.

2°) $P(Z=0) = C_{50}^{0}\ 0{,}03^{0} \times 0{,}97^{50} = 0{,}97^{50} \simeq 0{,}218$

$P(Z \leq 2) = P(Z=0) + P(Z=1) + P(Z=2) \simeq 0{,}218 + 0{,}337 + 0{,}256$
$\simeq 0{,}811$

3°/a) $n \times p = 50 \times 0{,}03 = 1{,}5 < 15 \qquad p \leq 0{,}1\ ;\ n > 30$.

on peut approcher la loi de Z par la loi de poisson $\mathcal{P}(1{,}5)$

b) $P(Z \leq 2) = P(Z=0) + P(Z=1) + P(Z=2) \simeq 0{,}223 + 0{,}335 + 0{,}251$
$\simeq 0{,}809$

Partie C.

1°) estimation ponctuelle $\hat{p} = \frac{96}{100} = 0{,}96$.

2°) intervalle de confiance au seuil de confiance 0,95

$\left[\hat{p} - t \times \sqrt{\frac{p(1-p)}{99}}\ ;\ \hat{p} + t\sqrt{\frac{p(1-p)}{99}}\right]$ avec $2\Pi(t) - 1 = 0{,}95$
$\Pi(t) = 0{,}975$

$\left[0{,}96 - 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}96 \times 0{,}04}{99}}\ ;\ \hat{p} + 1{,}96\sqrt{0{,}00388}\right] \qquad t = 1{,}96$.

$(0{,}96 - 0{,}0386\ ;\ 0{,}96 + 0{,}0386]$

$[0{,}921\ ;\ 0{,}999]$