OUTILS DE CALCUL

1°) Différents types de nombres.

Déf : $\mathbb{N}$ est l'ensemble de tous les nombres entiers naturels ; $\mathbb{N} = \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; \ldots\ldots\}$.

Déf : $\mathbb{Z}$ est l'ensemble de tous les nombres entiers relatifs ; $\mathbb{Z} = \{0 ; 1 ; -1 ; 2 ; -2 ; 3 ; -3 ; \ldots\ldots\}$.

$1 \in \mathbb{N}$; $1 \in \mathbb{Z}$; $-1 \in \mathbb{Z}$; $-1 \notin \mathbb{N}$.

Déf $\mathbb{D}$ est l'ensemble de tous les nombres décimaux (nombres qui s'écrivent avec une partie décimale "qui s'arrête").

$4{,}32 \in \mathbb{D}$ mais $4{,}32 \notin \mathbb{Z}$ et $4{,}32 \notin \mathbb{N}$

$\frac{1}{3} = 0{,}333\,333 \ldots\ldots3 \ldots.. \notin \mathbb{D}$ car la partie décimale "ne s'arrête pas".

$5 \in \mathbb{N}$, $5 \in \mathbb{Z}$, $5 \in \mathbb{D}$ (on peut écrire 5,0)

Déf : Un nombre rationnel est un quotient $\frac{a}{b}$ d'un entier relatif a par un entier relatif non nul b.

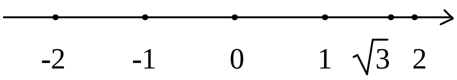
$\mathbb{Q}$ est l'ensemble des nombres rationnels.

$\frac{1}{3} \in \mathbb{Q}$, $5 \in \mathbb{Q}$ mais $\pi \notin \mathbb{Q}$, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Déf : $\mathbb{R}$ est l'ensemble de tous les nombres rencontrés jusqu'à maintenant, les nombres réels.

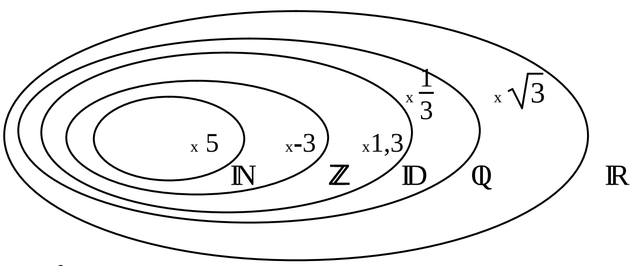
$\pi \in \mathbb{R}$, $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$. les nombres réels qui ne sont pas rationnels sont appelés nombres irrationnels.

Les points d'une droite graduée sont repérés par des nombres réels appelés leurs abscisses.



$5 \in \mathbb{N}$, $5 \in \mathbb{Z}$, $5 \in \mathbb{D}$, $5 \in \mathbb{Q}$, $5 \in \mathbb{R}$.

tout entier naturel est un entier relatif, on dit que $\mathbb{N}$ est inclus dans $\mathbb{Z}$ et on écrit $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$
tout entier relatif est un nombre décimal, on dit que $\mathbb{Z}$ est inclus dans $\mathbb{D}$ et on écrit $\mathbb{Z} \subset \mathbb{D}$.
de même, on a $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$



2°) Ecriture fractionnaire.

Déf : une écriture fractionnaire est le quotient $\frac{a}{b}$ de 2 nombres a et b avec b non nul .

a) où placer le signe?

Th : si $b \neq 0$ alors $\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$.

$$\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$$

remarque: $(-a) . b = a . (-b) = - ab$ et $(-a) .(-b) = ab$.

b) Egalité.

Th : si b et k sont non nuls alors $\frac{a}{b} = \frac{k.a}{k.b}$

ex : $\frac{8}{6} = \frac{2 \times 4}{2 \times 3} = \frac{4}{3}$.

Th : si b et d sont non nuls alors $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$.

remarque : cela signifie que si on a $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, alors on a $ad = bc$.

et que si on a $ad = bc$, alors on a $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

ex : si on me dit $\frac{x}{4} = \frac{2}{3}$ alors je peux dire $x \times 3 = 4 \times 2$

et donc $x = \frac{8}{3}$.

c) Somme. Différence.

* si les dénominateurs sont les mêmes $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a + c}{b}$ et $\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a - c}{b}$ (avec $b \neq 0$).

* si les dénominateurs ne sont pas les mêmes, on réduit au même dénominateur.

si on ne peut faire mieux, $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \times d}{b \times d} + \frac{c \times b}{d \times b} = \frac{ad + bc}{bd}$ et on essaie de simplifier

ex : $\frac{3}{4} + \frac{2}{3} = \frac{3 \times 3}{4 \times 3} + \frac{2 \times 4}{3 \times 4} = \frac{9}{12} + \frac{8}{12} = \frac{17}{12}$.

mais il vaut mieux faire $\frac{3}{10} + \frac{2}{15} = \frac{9}{30} + \frac{4}{30} = \frac{13}{30}$.

d) Produit.

Th : si $b \neq 0$ et $d \neq 0$, alors $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a\,c}{b\,d}$ (il est très fortement déconseillé de mettre au même dénominateur !).

$\frac{a}{b} \times c = \frac{a}{b} \times \frac{c}{1} = \frac{a\,c}{b}$.

ex : $\frac{5}{-7} \times \frac{-14}{15} = \frac{-5 \times 14}{-7 \times 15} = \frac{5 \times 7 \times 2}{7 \times 5 \times 3} = \frac{2}{3}$.

e) Inverse. Quotient.

Th : Pour a et b non nuls, l'inverse de $\frac{a}{b}$ est $\frac{b}{a}$ et on a $\frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = 1$.

ex : l'inverse de $\frac{3}{4}$ est $\frac{4}{3}$ et l'inverse de 5 est $\frac{1}{5}$ et l'inverse de $\frac{1}{5}$ est 5.

Th : $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a\,d}{b\,c}$ (b, c, d non nuls).

$\frac{a}{b} : c = \frac{a}{b} \times \frac{1}{c} = \frac{a}{b\,c}$ (b et c non nuls).

Pour diviser par un nombre non nul on multiplie par son inverse.

ex : $\dfrac{\frac{3}{4} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}}{\frac{2}{3} - \frac{1}{5}} =$

3°) Racine carrée.

Déf : Soit a un réel positif.

On appelle racine carrée de a et on note $\sqrt{a}$, l'unique nombre **positif** dont le carré vaut a.

Th : soit a et b deux réels positifs.

$(\sqrt{a})^2 = a$

$\sqrt{a^2} = a$

$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$

$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ (a positif et b positif strictement).

ex : $(\sqrt{3})^2 = 3.$ $\qquad \sqrt{3^2} = 3$ $\qquad \sqrt{(-8)^2} = 8$

$\sqrt{75} = \sqrt{25 \times 3} = \sqrt{25} \times \sqrt{3} = 5\sqrt{3}.$

$\sqrt{8} \times \sqrt{18} = \sqrt{8 \times 18} = \sqrt{4 \times 2 \times 2 \times 9} = \sqrt{4 \times 2^2 \times 9} = \sqrt{4} \times \sqrt{2^2} \times \sqrt{9} = 2 \times 2 \times 3 = 12.$

(on aurait pu aussi écrire $\sqrt{4 \times 2} \times \sqrt{9 \times 2} = \sqrt{4} \times \sqrt{2} \times \sqrt{9} \times \sqrt{2} = 2 \times \sqrt{2} \times 3 \times \sqrt{2} = 6 \times (\sqrt{2})^2 = 6 \times 2 = 12.$

$$\sqrt{\frac{25}{16}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{16}} = \frac{5}{4}.$$

$$\frac{\sqrt{45}}{\sqrt{15}} = \sqrt{\frac{45}{15}} = \sqrt{3}.$$

$\sqrt{12} - 2\sqrt{75} + 3\sqrt{147} =$

il n'y a pas de propriété sur les sommes de racines, il faut essayer d'avoir une seule sorte de racine.

$\sqrt{12} = \sqrt{4} \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

$2\sqrt{75} = 2\sqrt{25} \times \sqrt{3} = 2 \times 5 \times \sqrt{3} = 10\sqrt{3}$

$3\sqrt{147} = 3\sqrt{49} \times \sqrt{3} = 3 \times 7 \times \sqrt{3} = 21\sqrt{3}$

donc $\sqrt{12} - 2\sqrt{75} + 3\sqrt{147} = 2\sqrt{3} - 10\sqrt{3} + 21\sqrt{3} = (2 - 10 + 21)\sqrt{3} = \boxed{13\sqrt{3}}$.

Ecrire sans radical au dénominateur.

$$\frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{4}{\sqrt{5} - 2} = \frac{4(\sqrt{5} + 2)}{(\sqrt{5} - 2)(\sqrt{5} + 2)} = \frac{4(\sqrt{5} + 2)}{(\sqrt{5})^2 - 2^2} = \frac{4(\sqrt{5} + 2)}{5 - 4} = \frac{4(\sqrt{5} + 2)}{1} = \boxed{4\sqrt{5} + 8}$$

Comparer $5\sqrt{6}$ et $6\sqrt{5}$.

$5\sqrt{6} = \sqrt{5^2}\sqrt{6} = \sqrt{25 \times 6} = \sqrt{150}.$

$6\sqrt{5} = \sqrt{6^2}\sqrt{5} = \sqrt{36 \times 5} = \sqrt{180}$ $\qquad$ donc $\boxed{5\sqrt{6} < 6\sqrt{5}}$

4°) Puissances.

ex $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$

$3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$

$4^1 = 4$

$5^0 = 1$

Déf : Soit a un nombre réel quelconque et n un entier naturel (donc positif) :

si $n \geq 2$ alors $a^n = a \times \ldots \times a$ (n facteurs).

$a^1 = a$

si $a \neq 0$ $\quad a^0 = 1.$

si $a \neq 0$ alors $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

ex : $10^4 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10\,000$ (quatre zéros)

$10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000} = 0,001$ (le 1 est le troisième chiffre après la virgule, et en tout il y a trois zéros).

2^3	2^2	2^1	2^0	2^{-1}	2^{-2}	2^{-3}
8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

$\xleftarrow{\times 2}$ $\qquad$ $\xrightarrow{: 2 \text{ ou } \times \frac{1}{2}}$

Th : Soit a et b deux nombres réels non nuls, m et n deux entiers relatifs

$a^n \times a^p = a^{n+p}$

$\dfrac{a^n}{a^p} = a^{n-p}$

$(a^n)^p = a^{np}$

$(a \times b)^n = a^n b^n$

$\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$

ex : $2^3 \times 2^4 =$

$\dfrac{2^5}{2^3} =$

$3^4 \times 3^{-2} =$

$\dfrac{5^3}{5^{-2}} =$

$2^3 \times 5^3 =$

$\dfrac{8^3}{4^3} =$

$(2^{-3})^2 =$

$\dfrac{3^{12} \times (3^{-2})^3}{3^4} =$

$\dfrac{2^5 \times 25}{8 \times 5} =$

$\dfrac{12^3 \times 15}{4^3 \times 5^3} =$

Ecriture scientifique

$7\,340 = 7{,}34 \times 10^3$	$1 \leq 7{,}34 < 10$
$10\,000 = 1 \times 10^4$	$1 \leq 1 < 10$
$-4\,312 = -4{,}312 \times 10^3$	$1 \leq 4{,}312 < 10$
$0{,}008\,2 = 8{,}2 \times 10^{-3}$	$1 \leq 8{,}2 < 10$

écriture scientifique : $a \times 10^n$ ou $-a * 10^n$ avec $1 \leq a < 10$ et n entier relatif.

ex : $4{,}2 \times 10^3 =$

$(7{,}3 \times 10^5) \times (4 \times 10^{-3}) =$

mais attention pour $4{,}2 \times 10^3 + 5{,}1 \times 10^2$ à cause du signe +.

soit on calcule séparément:

soit on écrit $4{,}2 \times 10^1 \times 10^2 + 5{,}1 \times 10^2 = 42 \times 10^2 + 5{,}1 \times 10^2 =$

$7{,}34 \times 10^{-8} + 5{,}1 \times 10^{-7} =$

5°) Développements. Factorisations.

a) Sommes. Produits.

Th : Pour tous nombres a, b, c

$a + b = b + a$

$a + (b + c) = (a + b) + c = a + b + c = a + c + b =$ …..

$a + (b - c) = a + b - c$

$a - (b + c) = a - b - c$

$a - (b - c) = a - b + c$

$a \times (b \times c) = (a \times b) \times c = a \times b \times c = a \times c \times b =$ …..

ex : $38 + (13 + 2) = 38 + 2 + 13 = 40 + 13 = 53$

$43 - 18 = 43 - (20 - 2) = 43 - 20 + 2 = 23 + 2 = 25$

$37 - 22 = 37 - (20 + 2) = 37 - 20 - 2 = 17 - 2 = 15$

$5 \times 13 \times 2 = 5 \times 2 \times 13 = 10 \times 13 = 130.$

$-3\,(x - 3)\,(-2) = 6\,(x - 3).$

b) <u>Développements.</u>

<u>Th</u> : Pour tous nombres a, b, c

$a (b + c) = a b + a c$
$a (b – c) = a b – a c$
$(a + b) c = a c + b c$
$(a – b) c = a c – b c$

ex : $3 (x + 7) = 3x + 21$ produit $\xrightarrow[\text{on développe}]{}$ somme

$3x + 21 = 3 (x + 7)$ somme $\xrightarrow[\text{on factorise}]{}$ produit

$(2x + 3) (x – 7) =$

$(x + 7) (2x – 5) (x – 3) = [(x + 7) (2x – 5)] (x – 3)$
$=$
$=$

c)<u>Egalités remarquables.</u>

<u>Th</u> : Pour tous nombres a et b :

$(a + b)^2 =$
$(a – b)^2 =$
$(a + b) (a – b) =$

ex : $(x + 7)^2 =$

$(2x – 5)^2 =$

$\left(\frac{3}{4} x + \frac{2}{3} y \right)^2 =$

$(4x – 3) (4x + 3) =$

$(3x + 7)^2 – (3x + 7) (3x – 7) =$

$6 (3x – 5)^2 =$

$(\sqrt{3} + 2) (\sqrt{3} – 2) =$

$(\sqrt{3} + \sqrt{5})^2 =$

d)<u>Factorisation.</u>

<u>Déf</u>: factoriser, c'est transformer une somme algébrique en produit.

$a b + a c = a (b + c)$
$a b – a c = a (b – c)$

<u>un facteur en commun</u>

$6x^2 + 5x =$

$9x^3 – 6x^2 =$

$(8x + 3) (3x – 2) – (8x + 3) (5x – 4) =$

$(x + 7)^2 – (x + 7) (3x – 2) =$

$(2x + 3) – (2x + 3) (x + 5) =$

$(3x + 6) (x + 7) – (x + 2) (2x – 5)=$

$(2x – 5) (x + 7) + (5 – 2x) (2x + 5) =$

<u>en utilisant les égalités remarquables</u>

$x^2 + 4x + 4 =$

$4x^2 - 12x +9 =$

$\frac{1}{4} t^2 – 3 t + 9 =$

$4x^2 – 9 =$

$\frac{25}{16} t^2 - \frac{16}{9} =$

$9x^2 - 5 =$

$(2x - 3)^2 - (4x + 7)^2 =$

mélange des deux.

$2x^2 - 18 =$

$4x^2 - 9 - (2x + 3)(x + 7) =$

6°) Equations.

a) Premier degré.

ex : Résoudre l'équation $2x - 8 = 0$, c'est trouver les réels x, s'ils existent tels que $2x - 8 = 0$.

5 n'est pas solution car $2 \times 5 - 8 = 2 \neq 0$.

4 est solution car $2 \times 4 - 8 = 0$.

$\mathbf{2x - 8 = 0}$ on ajoute ou on soustrait le même nombre aux deux membres

$2x - 8 + 8 = 0 + 8$ ici on ajoute 8

$\mathbf{2x = 8}$

$\dfrac{2x}{2} = \dfrac{8}{2}$ on multiplie ou on divise les deux membres par le même nombre non nul

$\mathbf{x = 4}$ ici on divise par 2

ces 5 équations sont équivalentes : elles ont la même solution 4.

on écrit $\boxed{S = \{4\}}$

Résoudre $3x - 5 = -4x + 7$

b)Equation produit.

Th : Pour tous réels a et b, $a \times b = 0 \Leftrightarrow (a = 0 \text{ ou } b = 0)$

Un produit est nul si et seulement si un au moins des facteurs est nul.

ex : Résoudre $(3x - 5)(x + 7) = 0$

soit $3x - 5 = 0$ soit $x + 7 = 0$

$3x = 5$ $x = -7$

$x = \dfrac{5}{3}$

donc 2 solutions $\dfrac{5}{3}$ et 7. $\boxed{S = \left\{ \dfrac{5}{3}, 7 \right\}}$

ex : Résoudre $(3x + 7)(2x - 3) = (3x + 7)(x - 5)$ (on ne peut pas diviser par $3x + 7$ qui peut être nul)

$(3x + 7)(2x - 3) - (3x + 7)(x - 5) = 0$ on factorise, donc

c) Equations $x^2 = a$.

Th : soit l'équation $x^2 = a$.

si $a < 0$ pas de solution

si $a = 0$ une solution 0

si $a > 0$ 2 solutions $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.

ex: $x^2 = 16$

$x^2 = -9$

$3x^2 + 7 = 19$

d)Equations avec x au dénominateur.

Th : pour b et d non nuls, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a\,d = b\,c$.

ex : résoudre $\frac{5}{2\,x} = 7$

pour $x \neq 0$ l'équation est équivalente à $2\,x \times 7 = 5 \times 1$

$14\,x = 5$ donc $x = \frac{5}{14}$

$\frac{5}{14}$ est différent de 0 donc il est accepté. $\boxed{S = \{\frac{5}{14}\}}$

ex : Résoudre $\frac{4}{x-7} = 2$

pour $x - 7 \neq 0$ c'est-à-dire $x \neq 7$, cette équation est équivalente à $4 \times 1 = 2\,(x - 7)$

$4 = 2\,x - 14$

$4 + 14 = 2\,x$

$18 = 2\,x$ donc $x = 9$ accepté $\boxed{S = \{9\}}$

ex : Résoudre $\frac{5}{x-3} = \frac{2\,x}{x-3}$

pour $x - 3 \neq 0$ c'est-à-dire $\boldsymbol{x \neq 3}$, cette équation est équivalente à $5\,(x - 3) = 2\,x\,(x - 3)$

donc à $5\,(x - 3) - 2\,x\,(x - 3) = 0$

donc à $(5 - 2\,x)\,(x - 3) = 0$

soit $5 - 2\,x = 0$ soit $x - 3 = 0$

$5 = 2\,x$ $x = 3$ **refusé**

$\frac{5}{2} = x$

Donc une seule solution $\boxed{S = \{\frac{5}{2}\}}$

Th : $\frac{a}{b} = 0 \Leftrightarrow (b \neq 0 \text{ et } a = 0)$.

Deuxième façon préférable ici:

pour $x - 3 \neq 0$ c'est-à-dire $x \neq 3$, cette équation est équivalente à $\frac{5}{x-3} - \frac{2\,x}{x-3} = 0$

$\frac{5 - 2\,x}{x - 3} = 0$

donc $5 - 2\,x = 0$ et $x - 3 \neq 0$

$x = \frac{5}{2}$ et $x \neq 3$ $\boxed{S = \{\frac{5}{2}\}}$